Sobre a Natureza dos Objectos Matemáticos

António Machiavelo

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

24/3/2010

Os objectos matemáticos são reais ou são imaginários? São descobertos ou são criados? Têm uma existência independente dos seres humanos, ou são meras elaborações mentais destes? São quimeras, fantasias, sombras de um outro mundo, habitantes de um mundo ideal? Mas então como pode a Matemática ter tantas aplicações, concretas, reais e extremamente eficazes? Por outro lado, se têm uma existência própria, de que forma existem? Podem ser localizados no espaço e no tempo? De que modo?

---

1. A Grande Questão

A natureza dos *objectos* ou *entes* matemáticos[1] é um tema de debate que remonta, pelo menos, à Grécia Antiga, sendo desde então fonte de constante perplexidade entre filósofos e matemáticos. A questão central que tem sido debatida, ao longo de milénios, com maior ou menor intensidade, é a seguinte: os objectos, ou entes, matemáticos são reais ou são imaginários? Dito de outro modo, são descobertos ou são criados? Ou ainda, existem na "realidade" ou apenas num "mundo de ideias"?

Há um facto que é particularmente confuso: enquanto que alguns objectos matemáticos, como por exemplo os números complexos, parecem ser claramente uma invenção humana, já é muito difícil argumentar que resultados sobre estes, como por exemplo o chamado *teorema fundamental da Álgebra*[2], sejam uma criação humana! E isto parece conduzir a uma situação um pouco bizarra: inventamos objectos que depois têm propriedades que são completamente independentes de nós? Como é isto possível?

[1] Por exemplo, os números (naturais, racionais, reais, imaginários, p-ádicos), as figuras geométricas (planas, sólidas, n-dimensionais), as funções, os grupos, as álgebras, os espaços topológicos, as variedades diferenciáveis, os espaços de Hilbert de dimensão infinita.

[2] Que garante que todo o polinómio de coeficientes complexos se factoriza como um produto de polinómios lineares.

Enquanto investigador, um matemático parece desempenhar por vezes o papel de um construtor, de métodos ou ferramentas, outras vezes o de um descobridor, de resultados sobre certos objectos mais ou menos abstractos. Na realidade, estas duas funções complementam-se, pois o objectivo da construção de métodos e ferramentas é o de levar a perceber melhor certos objectos e as suas propriedades, assim como o de servir para descobrir outras propriedades mais subtis desses mesmos objectos. Não há assim qualquer dúvida de que um matemático, enquanto faz matemática, se sente como um descobridor explorando terras incógnitas. Mas, pode-se perguntar, um descobridor de quê? Bem, de resultados sobre... E é precisamente neste ponto que surge uma questão particularmente difícil: sobre exactamente o quê?

Seja lá sobre o que for, seja lá qual for a natureza exacta dos objectos matemáticos, tanto a posição de que estes são reais como a posição de que são criados acarretam sérias dificuldades. Por um lado, quem defende que são reais tem de explicar de que forma o são, pois parece ser evidente que têm uma existência algo imaterial, certamente muito diferente da de um rochedo ou da de um rio. Por outro lado, quem defende que aqueles são criações da nossa mente e da nossa imaginação, deve explicar como é então possível a Matemática ter tantas, tão incríveis e eficazes aplicações ao "mundo real".

Neste artigo é delineado um contexto para uma resposta a este aparente dilema, tendo as reflexões que aqui se apresentam sido inicialmente inspiradas pela leitura de quatro obras que tiveram uma enorme influência nas posições filosóficas do autor: "*Gödel, Escher, Bach*" de Douglas R. Hofstadter [Hof78], "*Dragões do Éden*" de Carl Sagan [Sag77], "*O Acaso e a Necessidade*" de Jacques Monod [Mon77] e "*O Macaco Nu*" de Desmond Morris [Mor67].

2. Algumas correntes da Filosofia da Matemática

Há, em filosofia da matemática, vários "ismos" que se referem a várias posições sobre as questões ontológicas (*o que são?*) e epistemológicas (*como os conhecemos?*) colocadas pelos objectos matemáticos. Sendo impossível detalhar aqui todas essas posições e suas nuances, limitamo-nos a dar um esboço das principais correntes em Filosofia da Matemática, fornecendo ao leitor interessado alguns apontadores bibliográficos.

Uma das mais antigas e influentes doutrinas, conhecida por *Platonismo*, por ter sido exposta por Platão em várias das suas obras, consiste na opinião de que os objectos matemáticos existem num mundo mais real e perfeito do que aquele que se apresenta aos nossos sentidos, um mundo ≪*povoado por entidades (chamadas "Formas" ou "Ideias") que são eternas, imutáveis e, em certo sentido, paradigmáticas para a estrutura e carácter do nosso mundo*≫[3]. Um mundo que, numa perspectiva contemporânea, existiria fora do

[3] [Kra08], secção 1. Ver também as secções 2 e 9.

espaço e do tempo, não sendo nem físico nem mental[4]. Esta é uma posição defendida actualmente por, entre outros, o físico-matemático inglês Roger Penrose[5] e pelo matemático francês Alain Connes[6] que defende uma espécie de mundo platónico um pouco mais elaborado, a que chama "realidade matemática arcaica"[7] ou "primordial"[8]. Recentemente, a *Newsletter of the European Mathematical Society* publicou uma série de artigos sobre Platonismo, [$\mathrm{Dav}_1$07, Her08, Maz08, Mum08, $\mathrm{Dav}_2$08, Gar09, $\mathrm{Dav}_1$09], que mostram bem quanto o tema é actual, havendo alguma variedade de posições pró-platónicas e anti-platónicas. É interessante observar uma importante diferença de ênfase: enquanto que os anti-platónicos se concentram na rejeição da existência de um mundo sobrenatural e místico como o mundo ideal platónico, ignorando o problema da aplicabilidade da matemática, os pró-platónicos realçam a sua opinião de que os objectos matemáticos e as suas relações são independentes dos seres humanos, ignorando o problema da forma da sua existência.

Numa qualquer introdução à Filosofia da Matemática é quase obrigatório mencionar as três escolas anti-platónicas nascidas da "crise" dos fundamentos no final do século XIX e início do século XX, nomeadamente: *Logicismo*, *Formalismo* e *Intuicionismo*. Numa descrição sumária e superficial[9], pode dizer-se que a primeira consistia num projecto[10] de redução da Matemática à Lógica, de modo que as verdades matemáticas sê-lo-iam apenas devido à sua estrutura lógica interna e não por serem propriedades de uns quaisquer objectos exteriores; a segunda[11] é a posição de que a Matemática mais não é do que um jogo de símbolos de acordo com certas regras; a terceira[12], a posição de que a Matemática deve ter as suas raízes muito bem alicerçadas na intuição humana e em cuidadosas construções feitas com base nessas intuições, sendo a Matemática não mais do que o estudo dessas construções, que existem apenas após serem (mentalmente) construídas e são um assim um produto da mente humana. Há que observar que o principal objectivo dessas escolas era o de alicerçar filosoficamente os fundamentos da Matemática, e não tanto esclarecer o estatuto ontológico e epistemológico dos seus objectos de estudo. Apesar de o seu sucesso ter sido muito relativo e de estas posições filosóficas não terem

[4] Ver [Bal09].

[5] Ver pp. 11–23 de [Pen05].

[6] Ver [$\mathrm{Gol}_2$08], pp. 30–31.

[7] Ver [Cha95], pp. 180–192, sendo o termo introduzido na p. 182.

[8] Ver [Con01] pp. 6–8.

[9] Para mais detalhes, ver [Kli90], cap. 51, [$\mathrm{Dav}_2$82, Hen91, Gra92, Gue82, Sna79] e o cap. 8 de [$\mathrm{Gre}_1$80].

[10] Iniciado por Gottlob Frege (1848–1925) e desenvolvido, proeminentemente, por Bertrand Russel (1872–1970).

[11] A que, invariavelmente, se associa o nome de David Hilbert (1862–1943), mas quase sempre de uma forma simplista e caricatural. As ideias de Hilbert, um dos mas notáveis matemáticos de sempre, eram bem mais sofisticadas do que normalmente se descreve. Ver, sobre este assunto, [Zac09].

[12] Iniciada por Luitzen E. J. Brouwer (1881–1966) e desenvolvida pelo seu aluno Arend Heyting (1898–1980).

actualmente muitos adeptos, convém salientar que tiveram, todas as três e de diversas formas, um papel fundamental na criação da Lógica Moderna e de vários dos assuntos que hoje nela desempenham um papel importante, assim como contribuíram para a teoria da computação moderna, tendo mesmo desempenhado um papel importante na concepção dos próprios computadores.

Ao longo de todo o século XX surgiram e foram elaboradas diversas propostas de teorias filosóficas da Matemática, algumas enraizadas em posições filosóficas bem antigas, com outras roupagens ou com novos aperfeiçoamentos ou adornos. Sem pretender fazer aqui uma lista exaustiva, parece-me que as principais são as seguintes, por ordem alfabética:

Conceptualismo[13] — os objectos matemáticos, como todos os *universais*, não são mais do que conceitos mentais, não tendo qualquer substância ou realidade externa;

Construtivismo — um objecto matemático existe apenas quando há um processo de, de algum modo, o construir, havendo várias formas de construtivismo: o *intuicionismo* de Brouwer, já referido; o *finitismo* de Hilbert e Bernays; o *construtivismo recursivo* de Markov; o programa de análise construtiva de Bishop; o *construtivismo social*[14]: o conhecimento científico é uma construção social, sendo criado por relações e interacções sociais; o *construtivismo radical*: o conhecimento é meramente um processo de auto-organização cognitiva do cérebro humano e, sendo assim uma construção, é impossível saber o quanto reflecte uma realidade ontológica;

Estruturalismo — a Matemática trata, não de colecções de "objectos matemáticos", mas sim de padrões ou estruturas, sendo os objectos "lugares" nessas estruturas[15];

Ficcionalismo — as teorias matemáticas são histórias de ficção, exactamente como novelas ou contos de fadas[16];

Humanismo[17] — uma forma de conceptualismo social-cultural-histórico centrado nos seres humanos, no qual se defende que os objectos matemáticos são criados ou inventados pelos humanos, não de uma forma arbitrária, mas dependendo de necessidades da "vida", estando sujeitos a condicionalismos históricos e, uma vez criados, os objectos matemáticos tornar-se-iam parte da cultura humana, ganhando uma existência independente do seu criador ou inventor e tendo então propriedades bem-determinadas que podemos ou não

---

[13] De facto uma posição filosófica sobre o estatuto dos "universais" e não propriamente uma filosofia da matemática. Um *universal* é uma propriedade ou relação comum a vários objectos particulares. O *problema dos universais* é a questão de saber se são descobertos ou criados, se existem ou não, e de que forma.

[14] Uma teoria de aprendizagem transposta para filosofia da Matemática por Paul Ernest. Para uma crítica severa a esta proposta, ver [$\text{Gol}_1$99].

[15] Para mais detalhes, ver [Sha83].

[16] Ver [Hor08] e respectivas referências bibliográficas.

[17] Proposta por David Hersh em [Her79], baseada em [Whi47], mais tarde publicitada em [$\text{Dav}_2$82], revisitada em [Her95] e elaborada em [Her97].

descobrir[18];

Naturalismo — o ponto de vista filosófico segundo o qual tudo tem causas naturais[19];

Nominalismo[20] — os universais e abstracções, em particular os objectos matemáticos, não passam de nomes sem qualquer correspondência real: apenas os objectos particulares existem e o que há de comum a objectos distintos (*lisos*, por exemplo) é simplesmente o nome (*liso*) que designa algo de comum e nada mais ("*liso*" é algo que não tem existência por si só);

Quasi-empirismo — o conhecimento matemático é algo semelhante ao conhecimento empírico, no sentido de o critério de verdade em Matemática ser, como em Física, o sucesso prático das ideias, sendo o conhecimento matemático susceptível de correcção e não-absoluto[21].

Para mais detalhes e argumentos pró e contra estas diversas posições ver, para além das referências já indicadas, [$\text{Gol}_1$94, Goo79, Mac81][22]. Mas fica o leitor avisado que algumas discussões neste campo fazem lembrar anjos em cabeças de alfinetes e que, como escreveu Marvin Greenberg em [$\text{Gre}_1$80] (p. 245), há já uns anos mas que é verdade ainda hoje: ≪*a filosofia da matemática está num estado de total confusão*≫.

Todas as posições referidas podem ser pensadas como diferentes gradações num espectro *Realismo — Idealismo*, onde *realista* é um adjectivo que se aplica, neste contexto, a uma posição na qual se defende que os objectos de conhecimento são de alguma forma independentes da actividade da mente, enquanto que *idealista* se aplica aqui a posições centradas na defesa de que toda, ou uma grande parte, da existência desses mesmos objectos é exclusivamente mental[23].

A posição mais radicalmente idealista que se pode ter é denominada *solipsismo*. É a posição de que apenas o leitor que lê estas palavras existe, e absolutamente nada mais, sendo tudo o resto ilusões mentais[24]. Em [Rus27] (p. 302), Bertrand Russel escreve: ≪*recebi uma vez uma carta de um filósofo que professava ser solipsista mas que estava surpreendido de não haver outros! [...] Isto mostra que o solipsismo não é realmente acreditado mesmo por aqueles que pensam estar convencidos da sua verdade*≫. O solipsismo é normalmente apresentado como exemplo de uma teoria irrefutável (como provar

[18] Para uma crítica particularmente lúcida, ver Martin Gardner [Gar96], capítulos 22 e 24.

[19] Ver [Pas08].

[20] Aplica-se aqui a mesma observação que foi feita na nota-de-rodapé 13.

[21] Ver os artigos de Imre Lakatos e Hilary Putnam em [Tym86].

[22] Ver ainda as reflexões de Kurt Gödel contidas nos seus artigos traduzidos em [Lou79].

[23] Dada a versatilidade das palavras e as relações afectivas que todos nós, de um ou outro modo, temos com alguns conceitos, é capaz de ser útil mencionar que, no presente contexto, "realista" não tem qualquer relação com reis e rainhas, e que "idealista" nada tem aqui ver com a defesa de nobres e importantes ideais. Fica aqui a chamada de atenção para a necessidade de se tentar perceber muito bem o significado que se pretende dar aqui, como em outros sítios, às palavras que vão sendo usadas.

[24] Ver [Tho06] e o capítulo 1, "*Why I am not a solipsist*", de [Gar99].

que tudo não é uma ilusão da mente?), mas completamente infrutífera, pois nada explica. Percebe-se assim que não chega elaborar teorias coerentes e irrefutáveis: é necessário que tenham poder explicatório!

3. O "milagre" das aplicações

Um dos problemas centrais em filosofia da Matemática é o de explicar o que foi descrito[25] pelo físico Eugene Wigner[26] como a ≪eficácia irrazoável da matemática nas ciências naturais≫. São vários os exemplos dessa eficácia, desde a previsão de eclipses a viagens à Lua. Outros exemplos notáveis são:

- As propriedades das secções cónicas estudadas por matemáticos da Grécia antiga, a título de curiosidade intelectual, desempenharam um papel fundamental, mais de dois mil anos depois, na descoberta das leis que regem os movimentos dos planetas, por Johannes Kepler (1571–1630) a partir das observações metódicas de Tycho Brahe (1546–1601)[27];

- A previsão, em 1846, da existência de um planeta, Neptuno, feita por Urbain Le Verrier[28] (1811–1877), usando apenas matemática e dados de observações do planeta Urano, sendo atribuído a François Arago (1786–1853) o dito que Le Verrier ≪descobriu um planeta com a ponta da sua caneta!≫;

- A descoberta matemática por James Clerk Maxwell (1831–1879), "no papel", cerca de 1864, das ondas electromagnéticas, cuja existência é experimentalmente demonstrada mais de duas décadas depois, por Heinrich Hertz (1857–1894)[29];

- A descoberta, em 1900, do "lado" quântico do mundo atómico, por Max Planck[30] (1858–1947), que foi literalmente forçado pela matemática a aceitar certas interpretações físicas que lhe desagradavam fortemente[31];

- A geometria Riemanniana "criada" por Benhard Riemann (1826–1866), por volta de 1854, inspirada em trabalhos de Gauss (1777–1855), e posteriormente elaborada por

[25] Em [Wig60]. Ver também [Ham80, Col01].

[26] Recipiente do prémio Nobel da Física em 1963.

[27] Ver [Kli53], cap. IX, e [Oss59], p. 117.

[28] Houve durante muitos anos alguma polémica sobre se o matemático inglês John Couch Adams (1819–1892) merece ou não algum crédito na previsão da posição de Neptuno: ver [She04] onde se apresenta evidência de que não.

[29] Ver [Kli53], cap. XX, e [Oss59], cap. 6.

[30] Prémio Nobel da Física em 1918.

[31] [Hei58], p. 4.

Beltrami (1835–1900), Christoffel (1829–1900), Lipschitz (1852–1903), Ricci (1853–1925) e Levi-Civita (1873–1941), que irá desempenhar[32], mais de meio século depois, um papel crucial na teoria da relatividade geral de Albert Einstein[33] (1879–1955);

- A previsão da existência de anti-matéria por Paul Dirac[34] (1902–1984), em 1928, tendo sido a existência do positrão, a antipartícula correspondente ao electrão, comprovada experimentalmente quatro anos mais tarde;

- O uso de espaços de Hilbert complexos de dimensão infinita em Mecânica Quântica, uma das teorias físicas mais bem sucedidas, com previsões que coincidem com medições experimentais com uma precisão quase inacreditável[35].

Estes exemplos mostram também que matemática "criada" ou "descoberta" num contexto muitas vezes (aparentemente) desligado da "realidade" é usada décadas, séculos ou mesmo milénios mais tarde, na explicação e na previsão de fenómenos concretos e reais. Isto coloca sérias dificuldades a todas as posições filosóficas que encaram a matemática como um fenómeno meramente mental.

O físico francês Bernard D'Espagnat escreve, em [Esp93] (pp. 36–37), que uma das razões para a matemática ter sido desde o início um agente unificador da física é que ≪*a matemática não é somente uma linguagem cómoda, na realidade representa uma linguagem mais um raciocínio*≫. Que ≪*a matemática é insubstituível*≫ no sentido em que o seu desconhecimento impede ≪*o passar de uma descrição, instrutiva neste ou naquele caso, a uma descrição diferente e mais esclarecedora em determinados outros casos*≫, dando como exemplo a necessidade da matemática para "ver" que a lei clássica, dita lei de Snell–Descartes, de refracção da luz, que dá o desvio angular sofrido por um raio de luz ao passar para um meio para outro, é perfeitamente equivalente ao princípio de Fermat, que estipula que o caminho percorrido por um raio de luz entre dois pontos é aquele que minimiza o tempo percorrido. E acrescenta que ≪*todos os fenómenos naturais estão fortemente inter-relacionados: a dificuldade em mudar de ponto de vista traduz-se, na prática, por uma incapacidade em juntar os elos profundos que unem fenómenos tão diversos da natureza, constituindo-se, portanto, um obstáculo a uma verdadeira compreensão global*≫. A Matemática é assim algo que captura esses elos profundos.

Observe-se que os exemplos acima enumerados mostram algo mais, algo que quero aqui sublinhar muito bem: **a Matemática é mais que um instrumento de descrição do real — é uma ferramenta para a descoberta do real ainda desconhecido!** O exemplo disto que me parece um dos mais flagrantes é o da descoberta por Maxwell de

[32] Ver [Kli90], cap. 37 e §4 do cap. 48.
[33] Prémio Nobel da Física em 1921.
[34] Prémio Nobel da Física em 1933. Ver [Hei75], p. 392.
[35] Ver [Pen05].

todo o espectro de ondas electromagénicas. Como descobrir de outro modo, que não "teoricamente" a existência de ondas, como as de rádio, que não são detectadas por nenhum dos nossos cinco sentidos? Heinrich Hertz, o primeiro a demonstrar experimentalmente a existência dessas mesmas ondas electromagnéticas, escreveu[36]:

> *Não se consegue evitar a sensação de que estas fórmulas matemáticas têm uma existência independente e uma inteligência própria, que são mais sábias que nós, mesmo mais sábias que os seus descobridores, que delas retiramos mais do que originalmente nelas colocamos.*

Por tudo o que se expôs, parece-me inegável que a Matemática lida com coisas bem reais e que não pode simplesmente ser uma construção humana. Uma posição idealista relativa à natureza dos objectos matemáticos inevitavelmente esbarra no problema de explicar este enigma da aplicabilidade da Matemática. Na realidade, todas as defesas que conheço de uma concepção idealista dos objectos matemáticos ou ignoram este problema, ou o menosprezam, dando explicações completamente insatisfatórias, ou então confessam-se incapazes de o explicar. Mas o problema é ainda mais complicado do que normalmente é descrito, pois, como exemplificado acima, a Matemática não só fornece instrumentos para explicar, de um modo unificado, variadíssimos fenómenos, como dá ainda a capacidade de sonhar sobre coisas reais que são ainda desconhecidas. Como é isto possível?

4. Uma perspectiva Darwiniana

Antes de prosseguir, é necessário esclarecer que a posição que defenderei parte dos dois postulados seguintes:

- Há uma ≪realidade≫ exterior aos seres humanos, a ≪Natureza≫[37].
- Tudo, incluindo os seres humanos, é inteiramente natural, sem qualquer componente ≪sobrenatural≫[38].

Por "postulado" entendo aqui um ponto de partida que não pode ser demonstrado, mas para o qual há fortes indícios de ser verdadeiro. De facto, mais de dois mil e quinhentos anos de história da ciência têm sugerido, com uma crescente acumulação de evidências, a veracidade daquilo que acima é postulado. Como observou Stephen Jay Gould (1941–2002)[39]: ≪*As mais importantes revoluções científicas incluíram, sem excepção, o destronar da arrogância humana de pedestal após pedestal de convicções prévias acerca da nossa*

[36] Citado em [Hon08], p. 101.

[37] Que poderíamos designar por $\mathbb{N}$, em homenagem aos Pitagóricos!

[38] Em particular, todas as componentes de um ser humano estão contidas em $\mathbb{N}$. ☺

[39] Em [Gou96], pp. 164–165.

centralidade no cosmos≫. Mais ainda, não há exemplo de nenhuma posição que tenha partido de pressupostos que contradigam estes postulados e que tenha enriquecido, a partir desses pressupostos, o nosso conhecimento efectivo do cosmos, incluindo conhecimento sobre o ser humano (que é uma parte desse cosmos!).

Há uma dessas revoluções que, apesar de ter já século e meio, continua aparentemente a ser de difícil digestão: o mecanismo de ≪selecção natural e descendência com modificação lenta≫, a descoberta seminal feita por Charles Darwin (1809–1882)[40]. A "teoria da evolução", como é comummente conhecida[41], é uma das teorias científicas melhor comprovadas, tendo um enorme poder explanatório que tornou inteligíveis uma enorme quantidade de dados e observações sobre os organismos vivos previamente dispersas e confusas, assim como fomentou, e continua a fomentar, pesquisas frutíferas em várias áreas da Biologia[42].

No entanto, abundam ainda muitas ideias distorcidas ou mesmo **completamente erradas** sobre a teoria da evolução, nomeadamente[43]: que implica uma ascensão contínua de animais "inferiores" a animais "superiores"; que a vida evoluiu ao acaso; que há uma "intenção" implícita da selecção natural; que a teoria justifica comportamentos avarentos, imorais ou "animalescos"; que justifica a "lei do mais forte". Estas e outras razões, que se prendem com a remoção do ser humano de um lugar central entre os seres vivos, levam a certas recusas emocionais, conscientes ou inconscientes, das consequências profundas, ≪*transcendentalmente democráticas*≫[44], da teoria da evolução. Um exemplo disto, relevante para o assunto deste artigo, é a seguinte passagem de [Pen05][45] (p. 19), onde Roger Penrose deixa claro porque prefere o Platonismo:

> *Como me sinto, realmente, acerca da possibilidade de todas as minhas acções, e as de todos os meus amigos, serem em última análise governadas por princípios matemáticos deste tipo? Eu preferiria ter estas acções controladas por algo que habita algum aspecto do fabuloso mundo matemático de Platão do que tê-las sujeitas ao tipo de razões básicas e simplistas, tais como procura de*

[40] [Dar59]. Ver também [Sag93], capítulos 3 e 4.

[41] Apesar de Darwin não ter usado o termo "evolução", por boas razões, pois dá a ideia **errada** de haver um "progresso".

[42] Ver [Moo93], capítulos 7, 8 e 9.

[43] Ver [Gre$_2$09] e `http://evolution.berkeley.edu`. Parece haver alguma dificuldade em distinguir entre o acaso das mutações e o mecanismo de selecção natural, que é tudo menos caótico, assim como perceber que "apto", no sentido de adaptado ao meio ambiente, pouco tem a ver, em geral, com "mais forte", não sendo nada óbvio, a não ser *à posteriori*, que características tornam um animal "apto". Mesmo um cientista brilhante como Jacques Monod, galardoado com o prémio Nobel em Fisiologia ou Medicina em 1965, escreveu alguns sérios disparates sobre este assunto num livro pelo qual tenho (globalmente) uma enorme admiração, [Mon77]: ver pp. 143–144.

[44] Ver [Sag93], p. 67.

[45] Que não deixa por isso de ser um excelente livro, um autêntico "tour de force"!

prazer, avareza individual ou violência agressiva que muitos argumentam ser as implicações de um ponto de vista estritamente científico.

Penrose demonstra assim os seus preconceitos e alguma falta de reflexão relativamente à teoria da evolução[46]. Não admira pois que escreva um pouco depois[47]:

> [...] *continua a ser um profundo quebra-cabeças perceber porque razão as leis matemáticas se aplicam ao mundo com uma precisão tão fenomenal.*

Ora, numa perspectiva darwiniana este mistério começa a esfumar-se, pois, como Carl Sagan explicou em [Sag77], pp. 232–233:

> [...] *podemos imaginar um universo no qual as leis da natureza são imensamente mais complexas. Mas nós não vivemos num tal universo. Porque não? Penso que talvez tal se deva ao facto de todos os organismos que apreendiam o seu universo como muito complexo estarem mortos. Os nossos antepassados arborícolas que tinham dificuldade em calcular as suas trajectórias quando saltavam de uma árvore para outra não deixaram muita descendência*[48]*. A selecção natural serviu como uma espécie de crivo intelectual, produzindo cérebros e inteligências cada vez mais competentes para lidar com as leis da natureza. Esta ressonância, extraída por selecção natural, entre os nossos cérebros e o universo pode ajudar a explicar o enigma descrito por Einstein: a propriedade mais incompreensível do universo, disse, é que seja tão compreensível.*

Sempre achei curioso o facto de as pessoas se espantarem tanto com os ajustes delicados e extraordinários entre algumas características de alguns animais e o seu meio ambiente, e não repararem que o mesmo se aplica ao animal humano, assumindo, explícita ou implicitamente, haver uma estranha separação entre as nossas faculdades mentais e a natureza, separando o mental do material de um modo irreconciliável. Ora, a mente é o produto de milhões de anos de selecção natural e faz tanto parte da natureza como outra coisa qualquer. Contém extraordinárias adaptações dos humanos ao seu meio ambiente, entre as quais a capacidade de abstrair padrões e organizar informação.

[46]O que é corroborado na página seguinte (p. 22), em que mostra não entender as bases evolutivas da moral, quando afirma: ≪*A moralidade tem uma profunda ligação com o mundo mental, uma vez que está tão intimamente ligada aos valores atribuídos por seres conscientes e, mais importante ainda, à presença da própria consciência. É difícil ver o que a moral significaria na ausência de seres conscientes*≫. Ver sobre este assunto [All05], [Fra88] e o próprio Darwin, em [Dar82], capítulos 3, 4, e 5.

[47][Pen05], pp. 20–21.

[48]Isto é obviamente um exemplo caricatural.

5. Problemas de perspectiva

Antes de descrever a minha opinião sobre a natureza dos objectos matemáticos, é necessário introduzir algumas distinções importantes.

5.1 Representação e representado

Na nossa espécie o uso de símbolos é tão comum que é por vezes difícil separar a **representação** de algo, daquilo que por ela é **representado**[49]. Por exemplo, uma coisa é o símbolo "6" e algo totalmente distinto é o que ele representa. O número 6 tem representações distintas em várias línguas (ver figura 1), mas aquilo que é representado, o número em si, é a mesma "entidade". E o que é essa "entidade"? Uma quantidade, poder-se-à responder. Mas o que é uma quantidade? E, em particular, qual a que é representada por "6"?

٦ VI 六 陸 ௬ ๖ ༦

Figura 1: Numerais para o número seis, em árabe, latim, chinês simplificado, chinês tradicional, tâmil, tailandês e tibetano (respectivamente).

Estas questões poderão originar alguma confusão, usualmente não se vislumbrando uma resposta que não seja circular. Isto acontece justamente porque abstraímos com tanta facilidade que nem nos apercebemos do que estamos a abstrair! Um exemplo simples

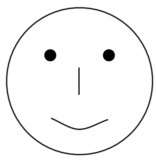

Figura 2: O que é isto?

poderá ajudar a esclarecer este ponto. Toda a gente reconhece na figura 2 uma face humana. No entanto, as faces humanas são tridimensionais, muito mais complexas, não havendo nenhum ser humano específico que esteja aí representado. Por que razão vemos então nela uma face? Porque representa (abstractamente!) um número de características comuns às faces humanas que é suficiente para as caracterizar[50]! E porque, espero tê-lo

[49] Esta confusão é eloquentemente ilustrada num quadro do pintor belga René Magritte (1898–1967), intitulado "a traição das imagens"(ver `http://en.wikipedia.org/wiki/The_Treachery_of_Images`), que contém a representação de um cachimbo juntamente com a frase «isto não é um cachimbo», o que é inteiramente verdade: não há nenhum cachimbo na figura, apenas uma sua representação!

[50] Não há nenhum outro animal com uma face tão redonda e que sorria movendo os lábios do modo esquematizado na figura...

demonstrado com este simples exemplo, os humanos abstraem tão facilmente quanto os peixes nadam ou as aves voam.

O que representa então o símbolo "6"? Representa algo que é comum a todos os conjuntos de coisas com seis elementos, ou seja a sua quantidade específica. Isto parece circular, mas não o é. Esta aparência de circularidade resulta de termos de usar as palavras que capturam esse conceito para o descrever, não podendo aqui arranjar-se uma alternativa fácil. Se quisermos podemos tentar uma explicação um pouco mais sofisticada dizendo que dois agrupamentos de objectos têm a mesma "quantidade" se poderem ser emparelhados, ou mais sofisticadamente ainda, se existir uma bijecção entre esses dois agrupamentos. E o 6 é o nome de uma dessas "quantidades", aquela que segue o 5. A dificuldade advém aqui de a noção de quantidade ser bastante abstracta e, ao mesmo tempo, simples, no sentido de ser irredutível a outros conceitos. Espero, no entanto, que esteja agora clara a diferença entre o numeral 6 e o número que ele representa. De toda esta discussão quero também registar aqui o facto de a noção de número advir de *relações* entre objectos.

5.2 Camadas e níveis

É também importante estar consciente de que as coisas têm em geral várias camadas, ou níveis, que podem ter características bem distintas. É frequente em discussões, filosóficas ou outras, haver desacordo entre os intervenientes sem que estes reparem que estão a centrar o seu discurso em níveis distintos, aos quais dão mais relevância, por um ou outro motivo, tendo ambos razão no que dizem, embora afirmem coisas contraditórias! Isto mostra a necessidade de deixar claro o contexto do que se diz, o que nem sempre é fácil, podendo mesmo ser extremamente difícil em situações um pouco complexas. Aliás, tenho a impressão que quanto mais interessante é uma situação, mais difícil é distinguir esses mesmos contextos.

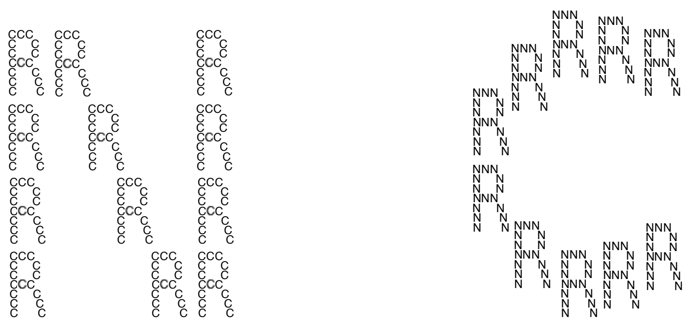

Figura 3: Níveis

A figura 3 pretende dar exemplo de algo cujos "níveis" são bem distintos[51]. Diferentes leitores poderão descrever essas figuras como um N e um C, outros como conjuntos de Rs, outros ainda como um conjunto de Cs, à esquerda, e um conjunto de Ns à direita. Todos têm razão! Uma descrição mais cuidada deveria incluir o nível de que se fala, enquanto que uma descrição completa deveria incluir descrições a todos os níveis. Mas isto pode não ser fácil descortinar. Imagine-se que, no exemplo acima, cada um dos pequenos Cs da figura do lado esquerdo, quando visto ao microcópio era como o C da figura à direita, e que cada um dos Ns da direita tinha a estrutura do N da esquerda[52]...

5.3 A noção de "objecto"

Finalmente, é ainda necessário clarificar o que se entende por "objectos matemáticos". Há aqui uma dificuldade séria, pois o conceito de "objecto" é já por si de difícil delimitação, facilmente admitindo extensões de significado a "objectos" um pouco mais gerais, extensões essas muito úteis em diversos contextos. Além do que tem, como quase todas as palavras, uma multiplicidade de significados. Objecto tanto pode significar "*o que afecta os sentidos*", como uma "*coisa material*", ou "*o que ocupa o espírito*", ou ainda "*o que pode ser pensado, por oposição ao ser pensante ou sujeito*".

Mesmo a tentativa de restringir a noção de "objecto" a algo que é "físico", esbarra imediatamente com alguns problemas: e as ondas electromagnéticas? E a gravidade? Bem, não vou aqui precisar o sentido em que uso a palavra "objecto", pois isso restringiria a sua utilidade e implicaria a introdução de várias palavras ou adjectivações adicionais. Limito-me a dar exemplos e deixar o leitor fazer o que nós seres humanos fazemos melhor: abstrair deles os significados pretendidos. Começo assim por observar que a gravidade é talvez melhor vista como uma relação entre objectos com massa.

Tomemos de seguida como exemplo de "objecto" o próprio leitor, considerado como objecto físico (no sentido comum destes termos, para já) e consideremos alguns níveis a que podemos descrevê-lo (ver figura 4): para um médico, o leitor é um conjunto de orgãos e suas inter-relações (chamo aqui a atenção para a importância destas inter-relações: rearranjemos os orgãos de outro modo e o resultado é dramaticamente diferente!); para um biólogo o leitor poderá ser visto como um conjunto de células e as suas (importantíssimas!) inter-relações; para um físico, o leitor é um conjunto de átomos e suas (imprescindíveis!) inter-relações. Mas, coisa curiosa, segundo Werner Heisenberg[53] (1901–1976), as partículas elementares são «formas matemáticas» ([Hei58], p. 36) e, em geral, (p. 51):

[51] Cf. "*Prelude...*" e "*... Ant Fugue*" em [Hof78], pp. 275–284 e 310–336.

[52] Que N seja a primeira letra de naturalismo, R seja a primeira letra de realismo e C seja a primeira letra de construtivismo não é aqui coincidência...

[53] Prémio Nobel da Física em 1932.

$$\boxed{\text{leitor}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{conjunto de orgãos e suas inter-relações}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{conjunto de células e suas inter-relações}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{conjunto de átomos e suas inter-relações}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{¿}\textit{entidade matemática}\text{ ?}}$$

Figura 4: O que é realmente um objecto?

> *A "coisa-em-si" é para o físico atómico, admitindo que ele alguma vez use o conceito, em última análise, uma estrutura matemática.*

Esta ideia é realçada pelo físico Bernard D'Espagnat no artigo já acima referido[54]: ≪*para além das funções já descritas, a matemática assume uma outra, cuja importância vai aumentando. Cada vez mais, com efeito, as matemáticas* **servem para definir os próprios conceitos que se procuram pôr em correspondência com os fenómenos observados**.≫

Chegamos assim a um resultado deveras curioso (ver fig. 5). Para tentar perceber o que é um objecto matemático, para determinar se estes são ou não reais, parece natural procurar saber primeiro o que é um "objecto real". Ora quando se analisa esta questão com alguma profundidade, somos conduzidos à conclusão que um objecto real é, em última análise, um objecto matemático! Isto mostra o quanto subtil é a noção de objecto! E sugere que os objectos matemáticos poderão afinal não ser assim tão mais peculiarmente estranhos do que outros tipos de objectos, mesmo os mais comuns.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{¿ Objecto Matemático ?}} \arrow[d, bend right] \\
\boxed{\text{¿ Objecto Real ?}} \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

Figura 5: Um ciclo estranho

Para agravar ainda mais as coisas, sabia o leitor que é um conjunto de átomos variável

[54] "*Física*" de [Esp93] (pp. 36–37).

com o tempo? Num discurso[55] proferido num encontro da Academia das Ciências dos Estados Unidos, em 1955, Richard Feynman[56] (1918–1988) observou:

> *[...] os átomos que estão no cérebro vão sendo substituídos: os que lá estavam antes já lá não estão.*
>
> *Assim, o que é esta nossa mente: o que são estes átomos com consciência? A semana passada eram batatas! Agora conseguem* relembrar *o que se passava na minha mente há um ano atrás — uma mente que foi há muito substituída.*
>
> *Note-se que aquilo a que chamo a minha individualidade é apenas um padrão ou dança [...]. Os átomos entram no meu cérebro, dançam uma dança e depois vão-se embora — há sempre novos átomos, mas sempre dançando a mesma dança, relembrando como era a dança no dia anterior.*

Ou seja, somos muito mais parecidos com um rio do que com uma pedra...

6. Conclusão

Qual então a natureza dos objectos matemáticos? A pergunta deve ser, de facto, reformulada do seguinte modo: o que representam os objectos matemáticos? A resposta é sugerida pelos próprios números naturais: relações! Relações entre objectos físicos (i.e. detectáveis pelos nossos sentidos) e outras mais profundas, que não são menos reais que esses mesmos objectos “físicos”! A Matemática captura e estuda relações e inter-relações entre relações, e relações entre estas inter-relações, e por aí fora, até onde chegar o engenho e sagacidade humanas. Por a visão e o tacto dominarem os nossos sentidos (em muitos contextos usamos “ver” como sinónimo de “perceber”) e o que vemos serem os objectos físicos, e não (directamente) as suas inter-relações e inter-dependências profundas e por vezes subtis, os objectos de estudo da Matemática são assim invisíveis. Mas o nosso cérebro é um poderoso guia que, refinado por éons de selecção natural, nos permite aperceber regularidades recônditas na Natureza e desse modo expandir o nosso conhecimento do ambiente circundante (figura 6). As vantagens evolutivas são óbvias.

Todas as escolas de pensamento em filosofia da Matemática me parecem contribuir com análises válidas sobre a Matemática, dos seus objectos e da sua *praxis*, só que concentrando-se em diferentes níveis, em aspectos diferentes ou partes distintas, cometendo-se depois o erro de misturar alhos com bugalhos. Por exemplo, é claro que os matemáticos $\mathbb{C}$**riam** representações, mas para **descobrirem** $\mathbb{R}$esultados sobre o que é representado por essas representações. A Matemática tem assim um lado construtivista

[55] Intitulado ≪*O Valor da Ciência*≫, cujo texto se encontra em [Fey89], pp. 240–248.
[56] Prémio Nobel da Física em 1965.

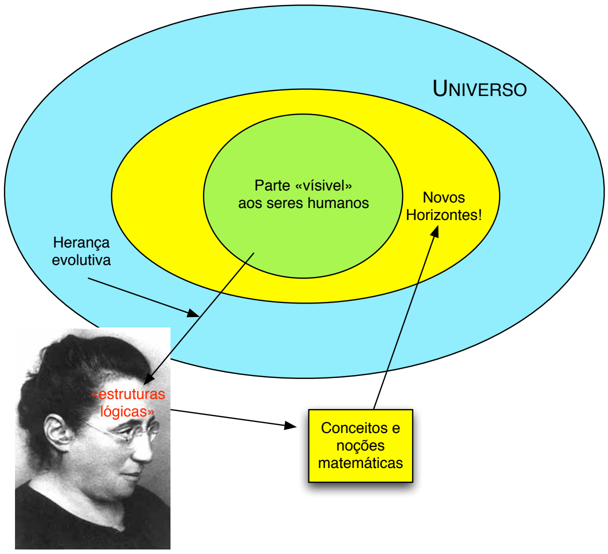

Figura 6: O Universo, os humanos e a Matemática

e um outro naturalista, obviamente enraizado em algo empírico, um lado formalista e um lado intuicionista estando essas suas múltiplas "faces" profundamente interligadas.

A contribuir para aumentar ainda mais a confusão, os matemáticos têm um hábito curioso: criam representações, que depois se tornam elas próprias objecto de estudo. São como biólogos que tenham inventado um novo tipo de microscópio para estudar seres vivos e depois se ponham a estudar esses microscópios. Em Matemática isto tem mostrado ser muito útil! Em minha opinião, o corpo $\mathbb{R}$, por exemplo, não é mais do que um instrumento análogo a um microscópio (ou será um telescópio?), que serve para estudar outros objectos matemáticos, mas que é simultaneamente um objecto de estudo[57].

Em conclusão, não tenho qualquer dúvida que a matemática corresponde, em última análise a algo de **R**eal, a que acedemos através da nossa **I**ntuição, que beneficia das adaptações evolutivas da nossa espécie e que ajuda a **C**onstruir instrumentos e desenvolver noções, usando simbioticamente a **E**xperiência e a **R**azão, que são destiladas em **C**onceitos que permitem **A**vançar na exploração da **R**ealidade. E esse "algo de real" é a própria textura do cosmos que corresponde a leis profundas que regem as mais diversas inter-relações entre "objectos".

[57]A descoberta das geometrias não-euclidianas é frequentemente usada para retirar ilações filosóficas anti-realistas sobre a Matemática (cf. [Kli90], pp. 1032–1036). Uma análise cuidada revela no entanto a falta de fundamento dessas ilações. Por exemplo, cada uma dessas geometrias pode ser representada dentro das outras, o que mostra que não são tão incompatíveis quanto aparentam à primeira vista. São apenas instrumentos distintos que capturam padrões e relações subtis de diferentes aspectos da realidade. É uma situação análoga a algo bem conhecido em Teoria dos Números, onde cada um dos anéis $\mathbb{Z}_n$ contém informações distintas, mas igualmente relevantes, sobre o anel $\mathbb{Z}$, facto muito útil na resolução de equações diofantinas.

A posição que defendo poderia chamar-se *Pitagorismo Darwiniano*, mas, pelo que acaba de ser dito, prefiro dar-lhe o nome de[58]:

Realismo **I**ntuitivo–**C**onceptualista **E**mpírico–**R**acionalista **C**onstrutivista **A**nti–**R**adical!

Referências

[All05] Colin Allen, Marc Bekoff, *Animal Play and the Evolution of Morality: an Ethological Approach*, Topoi **24** (2005) 125–135.

[Bal09] Mark Balaguer, "*Platonism in Metaphysics*", The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Edward N. Zalta (ed.), `http://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/platonism`, Summer 2009 edition.

[Cam84] Douglas M. Campbell, John C. Higgins (eds.), *Mathematics: People, Problems, Results*, Wadsworth International, 1984.

[Cha95] Jean-Pierre Changeaux, Alain Connes, *Conversations on Mind, Matter and Mathematics*, Princeton University Press, 1995.

[Col01] Mark Colyvan, *The Miracle of Applied Mathematics*, Synthese **127** (2001) 265–277.

[Con01] Alain Connes, André Lichnerowicz, Marcel Paul Schützenberger, *Triangle of Thoughts*, American Mathematical Society, 2001.

[Dar59] Charles Darwin, *On the Origin of Species by means of Natural Selection, or the preservation of favoured races in the struggle for life*, John Murray, 1859. Disponível em "*The Complete Work of Charles Darwin Online*", no endereço `http://darwin-online.org.uk`.

[Dar82] Charles Darwin, *The Descent of Man, and selection in relation to sex*, John Murray, segunda edição, 1882. Disponível em "*The Complete Work of Charles Darwin Online*", no endereço `http://darwin-online.org.uk`.

[$\mathrm{Dav}_1$07] E. Brian Davies, *Let Platonism Die*, Newsletter of the European Mathematical Society, June 2007, pp. 24–25.

[$\mathrm{Dav}_1$09] E. Brian Davies, *Some Recent Articles about Platonism*, Newsletter of the European Mathematical Society, June 2009, pp. 24–27.

[$\mathrm{Dav}_2$82] Philip J. Davis, Reuben Hersh, *The Mathematical Experience*, Houghton Mifflin, 1982.

[$\mathrm{Dav}_2$08] Philip J. Davis, *Why I Am A (Moderate) Social Constructivist*, Newsletter of the European Mathematical Society, December 2008, pp. 30–31.

[Esp93] Bernard D'Espagnat, "*Física*", em *Enciclopédia Einaudi* (dirigida por Ruggiero Romano), vol. 24, Imprensa Nacional Casa da Moeda, 1993.

[Fey89] Richard Feynman, *What Do You Care What Other People Think?*, Bantam Books, 1989.

[Fra88] Robert H. Frank, *Passions Within Reason: the strategic role of emotions*, W. W. Norton, 1988.

[Gar96] Martin Gardner, *The Night is Large: collected essays 1938–1995*, St. Martin's Griffin, 1996.

[58]Em humilde homenagem ao maior compositor de sempre: Johann Sebastian Bach (1685–1750) (ver [Hof78], pp. 3–8).

[Gar99] Martin Gardner, *The Whys of a Philosophical Scrivener*, St. Martin's Griffin, 1999.

[Gar09] Martin Gardner, *Is Reuben Hersh 'Out there'?*, Newsletter of the European Mathematical Society, June 2009, pp. 23–24.

[$\text{Gol}_1$94] Bonnie Gold, *What is the Philosophy of Mathematics and What Should It Be?*, The Mathematical Intelligencer **16** (1994) 20–24.

[$\text{Gol}_1$99] Bonnie Gold, *Review of "Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics" by Paul Ernest, and "What is Mathematics, Really?" by Reuben Hersh*, The American Mathematical Monthly **106** (1999) 373–380.

[$\text{Gol}_2$08] Catherine Goldstein, George Skandalis, *An interview with Alain Connes, part II*, Newsletter of the European Mathematical Society, March 2008, pp. 29–33.

[Goo79] Nicolas D. Goodman, *Mathematics as an Objective Science*, The American Mathematical Monthly **86** (1979) 540–551.

[Gou96] Stephen Jay Gould, *Dinosaur in a Haystack: reflections in Natural History*, Three Rivers Press, 1996.

[Gra92] G.-G. Granger, "*Matemáticas*", em *Enciclopédia Einaudi* (dirigida por Ruggiero Romano), vol. 21, Imprensa Nacional Casa da Moeda, 1993.

[$\text{Gre}_1$80] Marvin Greenberg, *Euclidean and non-Euclidean Geometry: development and history*, Freeman, segunda edição, 1980.

[$\text{Gre}_2$09] T. Ryan Gregory, *Understanding Natural Selection: Essential Concepts and Common Misconceptions*, Evolution: Education and Outreach **2** (2009) 156–175.

[Gue82] François Guénard, Gilbert Lelièvre (eds.), *Penser les Mathématiques*, Éditions du Seuil, 1982.

[Ham80] R. W. Hamming, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics*, The American Mathematical Monthly **87** (1980) 81–90.

[Hei58] Werner Heisenberg, *Physics and Philosophy: the revolution in modern science*, Penguin Books, 1989 (original de 1958).

[Hei75] Werner Heisenberg, *Development of concepts in the history of quantum theory*, American Journal of Physics **43** (1975) 389–394.

[Hen91] James M. Henle, *The Happy Formalist*, The Mathematical Intelligencer **13** (1991) 12–18.

[Her79] Ruben Hersh, *Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics*, Advances in Mathematics **31** (1979) 31–50.

[Her95] Ruben Hersh, *Fresh Breezes in the Philosophy of Mathematics*, The American Mathematical Monthly **102** (1995) 589–594.

[Her97] Ruben Hersh, *What is Mathematics, Really?*, Oxford University Press, 1997.

[Her08] Ruben Hersh, *On Platonism*, Newsletter of the European Mathematical Society, June 2008, pp. 17–18.

[Hof78] Douglas Hofstadter, *Gödel, Escher and Bach: an eternal golden braid*, Basic Books, 1978.

[Hon08] Giona Hon, Bernard Goldstein, *Hertz's methodology and its influence on Einstein*, pp. 95–105, em: Gudrun Wolfschmidt (ed.), *Heinrich Hertz (1857-1894) and the development of communication: proceedings of the symposium for history of science, Hamburg, October 8–12, 2007*, Books on Demand, 2008.

[Hor08] Leon Horsten, "*Philosophy of Mathematics*", The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Edward N. Zalta (ed.), `http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/philosophy-mathematics`, Fall 2008 edition.

[Kli53] Morris Kline, *Mathematics in Western Culture*, Oxford University Press, 1964 (original de 1953).

[Kli90] Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1990.

[Kra08] Richard Kraut, "*Plato*", The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Edward N. Zalta (ed.), `http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/plato`, Fall 2008 edition.

[Lou79] Manuel Lourenço (ed. e trad.), *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo* (antologia de textos de Paul Cohen, Michael Dummett, Solomon Feferman, Kurt Gödel, J. B. Rosser e Alan Turing), Fundação Calouste Gulbenkian, 1979.

[Mac81] Saunders Mac Lane, *Mathematical Models: a sketch for the Philosophy of Mathematics*, The American Mathematical Monthly **88** (1981) 462–472.

[Maz08] Barry Mazur, *Mathematical Platonism and Its Opposites*, Newsletter of the European Mathematical Society, June 2008, pp. 19–21.

[Mum08] David Mumford, *Why I am a Platonism*, Newsletter of the European Mathematical Society, December 2008, pp. 27–30.

[Mon77] Jacques Monod, *O Acaso e a Necessidade*, Europa-América, 1977.

[Moo93] John A. Moore, *Science as a Way of Knowing: the foundations of modern Biology*, Harvard University Press, 1993.

[Mor67] Desmond Morris, *O Macaco Nu*, Círculo de Leitores (edição não datada; o original é de 1967).

[Neu56] James R. Neuman, *The World of Mathematics*, Simon and Shuster, 1956.

[Oss59] Robert Osserman, *Poesia do Universo – uma exploração matemática do cosmos*, Difusão Cultural, 1996.

[Pas08] Alexander Paseau, "*Naturalism in the Philosophy of Mathematics*", The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Edward N. Zalta (ed.), `http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/naturalism-mathematics`, Winter 2008 edition.

[Pen05] Roger Penrose, *The Road to Reality: a complete guide to the laws of the universe*, Vintage Books, 2005.

[Rus27] Bertrand Russell, *An Outline of Philosophy*, Georg Allen & Unwin, 1951 (original de 1927).

[Sag77] Carl Sagan, *The Dragons of Eden: speculations on the evolution of human intelligence*, Hodder & Stoughton, 1977.
(Uma tradução portuguesa foi publicada em 2002 na colecção ≪*Ciência Aberta*≫ da editora Gradiva)

[Sag93] Carl Sagan, Ann Druyan, *Shadows of Forgotten Ancestors*, Ballantine Books, 1993.

[Sha83] Stewart Shapiro, *Mathematics and Reality*, Philosophy of Science **50** (1983) 523–548.

[She04] W. Sheehan, N. Kollerstrom, C. Waff, *The Case of the Pilfered Planet: did the British steal Neptune?*, Scientific American **291**, December 2004, pp. 92–99.

[Sna79] Ernst Snapper, *The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism, and Formalism*, Mathematics Magazine **52** (1979) 207–216. Reimpresso em [Cam84], vol. II, pp. 183–193.

[Tho06] Stephen P. Thornton, *Solipsism and the Problem of Other Minds*, *The Internet Encyclopedia of Philosophy*, James Fieser e Bradley Dowden (eds.), `http://www.iep.utm.edu`, 2006 (consultada em 6/7/2009).

[Tym86] Thomas Tymoczko (ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhäuser, 1986.

[Whi47] Leslie A. White, *The Locus of Mathematical Reality*, Philosophy of Science **14** (1947) 289–303. Reimpresso em [Neu56], vol. 4, pp. 2348–2364.

[Wig60] Eugene P. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Communications in Pure and Applied Mathematics **13** (1960) 1–14. Reimpresso em [Cam84], vol. III, pp. 116–125.

[Zac09] Richard Zach, "*Hilbert's Program*", The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Edward N. Zalta (ed.), `http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/entries/hilbert-program`, Spring 2009 edition.