

Sobre a Natureza dos Objectos Matemáticos

António Machiavelo

Centro de Matemática da Universidade do Porto
Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências do Porto

29 de Maio de 2010

A Grande Questão

Os objectos matemáticos são \mathbb{R} eais ou *I*maginários?
São *D*escobertos ou são *C*riados?

Têm uma existência independente dos seres humanos...
... ou são meras elaborações mentais destes?

Os Grandes Problemas:

\mathbb{R} eais/*D*escobertos → De que forma existem? Podem ser localizados no espaço e no tempo? De que modo?

*I*maginários/*C*riados → Como pode a Matemática ter tantas aplicações, umas quase-*Q*uiméricas, outras \mathbb{R} eais e *C*oncretas, mas sempre extremamente eficazes?

Alguns “Ismos” em Filosofia da Matemática

Platonismo: os objectos matemáticos existem num mundo mais real e perfeito do que aquele que se apresenta aos nossos sentidos, um mundo *povoado por entidades (chamadas “Formas” ou “Ideias”)* que são *eternas, imutáveis e, em certo sentido, paradigmáticas para a estrutura e carácter do nosso mundo*. Um mundo que, numa perspectiva contemporânea, existiria fora do espaço e do tempo, não sendo nem físico nem mental.

Alguns “Ismos” em Filosofia da Matemática

Logicismo: projecto de redução da Matemática à Lógica, de modo que as verdades matemáticas sê-lo-iam apenas devido à sua estrutura lógica interna e não por serem propriedades de uns quaisquer objectos exteriores.

Formalismo: posição de que a Matemática mais não é do que um jogo de símbolos de acordo com certas regras.

Intuicionismo: a posição de que a Matemática deve ter as suas raízes muito bem alicerçadas na intuição humana e em cuidadosas construções feitas com base nessas intuições, sendo a Matemática o estudo dessas construções, que existem apenas após serem mentalmente construídas, não passando pois de um produto da mente humana.

Alguns “Ismos” em Filosofia da Matemática

Conceptualismo: os objectos matemáticos, como todos os *universais*, não são mais do que conceitos mentais, não tendo qualquer substância ou realidade externa.

Construtivismo: um objecto matemático existe apenas quando há um processo de, de algum modo, o construir, havendo várias formas de construtivismo: o *intuicionismo* de Brouwer; o *finitismo* de Hilbert e Bernays; o *construtivismo recursivo* de Markov; o programa de análise construtiva de Bishop; o *construtivismo social*: o conhecimento científico é uma construção social, sendo criado por relações e interacções sociais; o *construtivismo radical*: o conhecimento é meramente um processo de auto-organização cognitiva do cérebro humano e, sendo assim uma construção, é impossível saber o quanto reflecte uma realidade ontológica.

Alguns “Ismos” em Filosofia da Matemática

Estruturalismo: a Matemática trata, não de colecções de “objectos matemáticos”, mas sim de padrões ou estruturas, sendo os objectos “lugares” nessas estruturas.

Ficcionalismo: as teorias matemáticas são histórias de ficção, exactamente como novelas ou contos de fadas.

Humanismo: (uma forma de conceptualismo social-cultural-histórico) os objectos matemáticos são criados ou inventados pelos humanos, não de uma forma arbitrária, mas dependendo de necessidades da “vida” e estando sujeitos a condicionalismos históricos e, uma vez criados, os objectos matemáticos tornar-se-iam parte da cultura humana, ganhando uma existência independente do seu criador ou inventor e tendo então propriedades bem-determinadas que podemos ou não descobrir.

Alguns “Ismos” em Filosofia da Matemática

Naturalismo: o ponto de vista filosófico segundo o qual tudo tem causas naturais.

Nominalismo: os universais e abstrações, em particular os objectos matemáticos, não passam de nomes sem qualquer correspondência real: apenas os objectos particulares existem e o que há de comum a objectos distintos (*lisos*, por exemplo) é simplesmente o nome (*liso*) que designa algo de comum e nada mais (“*liso*” é algo que não tem existência por si só).

Quasi-empirismo: o conhecimento matemático é algo semelhante ao conhecimento empírico, no sentido de o critério de verdade em Matemática ser, como em Física, o sucesso prático das ideias, sendo o conhecimento matemático susceptível de correcção e não-absoluto.

Alguns “Ismos” em Filosofia da Matemática

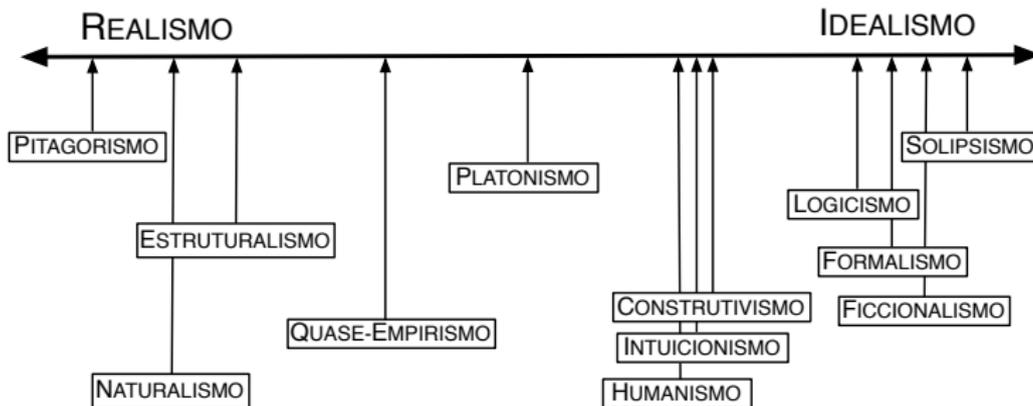


Figura: Alguns “ismos” em Filosofia da Matemática

O “milagre” das aplicações

- Secções cónicas (Grécia antiga) \rightsquigarrow leis de Kepler
- Le Verrier e a descoberta de Neptuno (1846).
François Arago: “Le Verrier descobriu um planeta com a ponta da sua caneta!”
- James C. Maxwell (1831-1879) e as ondas electromagnéticas.
- 1900: Matemática “força” Max Planck a aceitar o “lado” quântico do mundo atómico.
- Geometria Riemanniana (\sim 1854) \rightsquigarrow teoria da relatividade geral (GPS...).
- 1928: previsão da existência de anti-matéria por Dirac.
- Uso de espaços de Hilbert complexos de dimensão infinita na Mecânica Quântica...

O “milagre” das aplicações

Bernard D'Espagnat, “*Física*”, em *Enciclopédia Einaudi* (dirigida por Ruggiero Romano), vol. 24, Imprensa Nacional Casa da Moeda, 1993:

A matemática não é somente uma linguagem cómoda, na realidade representa uma linguagem mais um raciocínio.

A matemática é insubstituível no sentido em que o seu desconhecimento impede **o passar de uma descrição, instrutiva neste ou naquele caso, a uma descrição diferente e mais esclarecedora em determinados outros casos.**

O “milagre” das aplicações

Todos os fenómenos naturais estão fortemente inter-relacionados: a dificuldade em mudar de ponto de vista traduz-se, na prática, por uma incapacidade em juntar os elos profundos que unem fenómenos tão diversos da natureza, constituindo-se, portanto, um obstáculo a uma verdadeira compreensão global.

A Matemática captura elos profundos.

A Matemática é mais que um instrumento de descrição do real...
...é uma ferramenta para a descoberta do real ainda desconhecido!

O “milagre” das aplicações

Não se consegue evitar a sensação de que estas fórmulas matemáticas têm uma existência independente e uma inteligência própria, que são mais sábias que nós, mesmo mais sábias que os seus descobridores, que delas retiramos mais do que originalmente nelas colocamos.

Heinrich Hertz (1857-1894)

Uma pergunta difícil

O que é...

...o número 6 ?

٦ VI 六 陸 𑌫 ๖ ༦

Figura: Numerais para o número seis, em árabe, latim, chinês simplificado, chinês tradicional, tâmil, tailandês e tibetano (respectivamente).

Representação/Representado



Figura: A traição das imagens (René Magritte, 1928–29).

Representação/Representado

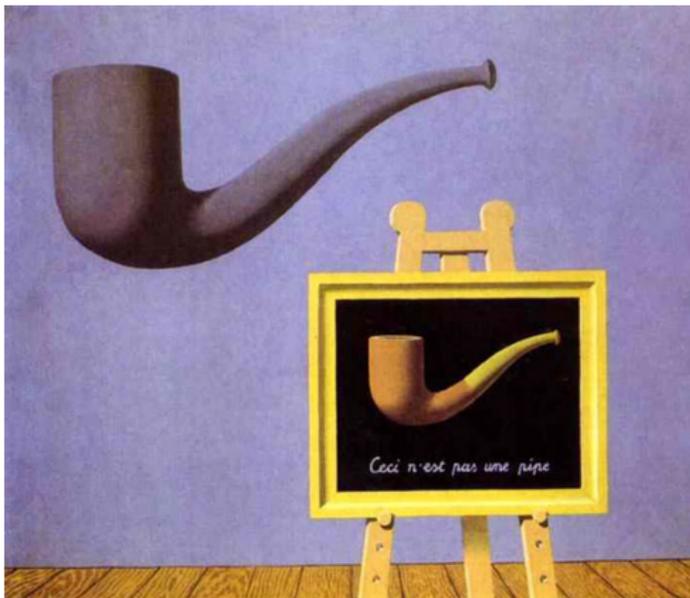
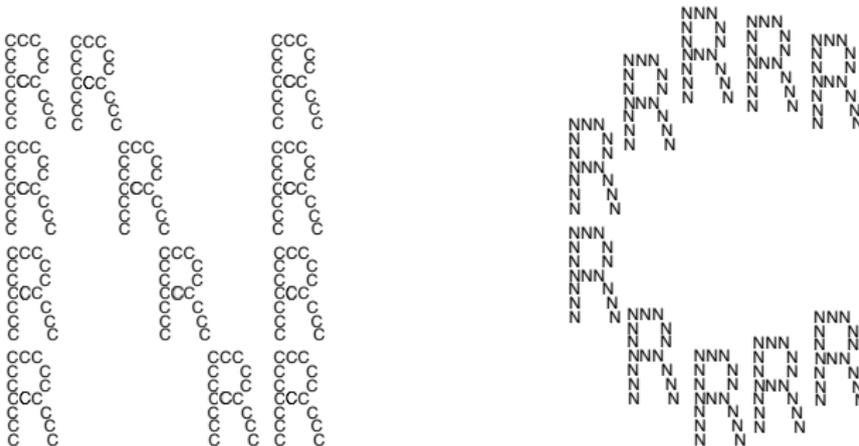


Figura: Os dois mistérios (René Magritte, 1966).

Níveis



Níveis

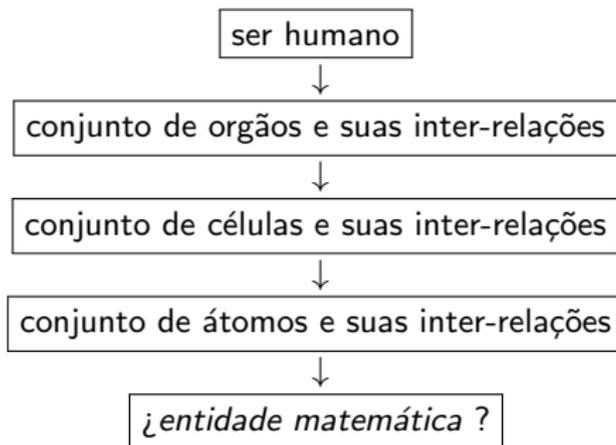
Os matemáticos **Criam** representações...

... para **descobrirem** Resultados sobre o que é representado por essas representações.

A Matemática tem assim um lado construtivista e um outro naturalista, obviamente enraizado em algo empírico; um lado formalista e um lado intuicionista, estando essas suas múltiplas facetas profundamente interligadas.

Objectos

O que é um objecto? Uma coisa “física”?
E a gravidade? E as ondas electromagnéticas? ...



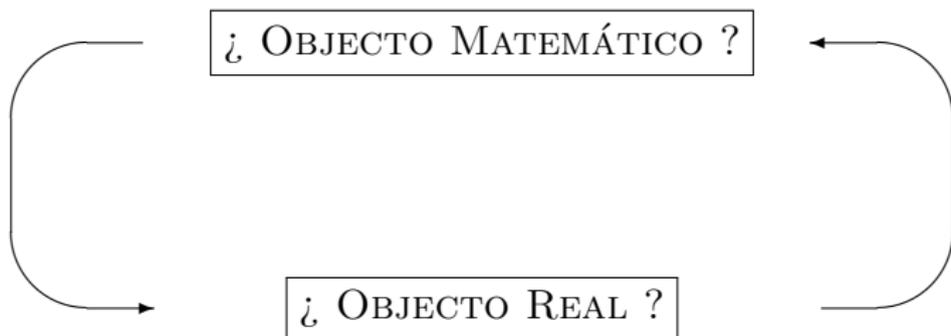
Objectos

Werner Heisenberg [Prémio Nobel da Física em 1932]:

As partículas elementares são **“formas matemáticas”** e, em geral, a **“coisa-em-si”** é **para o físico atómico, admitindo que ele alguma vez use o conceito, em última análise, uma estrutura matemática.**

Esta ideia é realçada por Bernard D'Espagnat: *para além das funções já descritas, a matemática assume uma outra, cuja importância vai aumentando. Cada vez mais, com efeito, as matemáticas servem para definir os próprios conceitos que se procuram pôr em correspondência com os fenómenos observados.*

Objectos



Objectos

Richard Feynman [Prémio Nobel da Física em 1965] observou:

[...] os átomos que estão no cérebro vão sendo substituídos: os que lá estavam antes já lá não estão.

Assim, o que é esta nossa mente: o que são estes átomos com consciência? A semana passada eram batatas! Agora conseguem relembrar o que se passava na minha mente há um ano atrás — uma mente que foi há muito substituída.

Note-se que aquilo a que chamamos a nossa individualidade é apenas um padrão ou dança [...]. Os átomos entram no nosso cérebro, dançam uma dança e depois vão-se embora — há sempre novos átomos, mas sempre dançando a mesma dança, relembrando como era a dança no dia anterior.

Postulados

- Há uma *Realidade* exterior aos *Seres Humanos*, a *Natureza*.
- Tudo, incluindo os *SHs*, é inteiramente natural, sem qualquer componente sobrenatural. $(\{SHs\} \subset \mathbb{N})$

As mais importantes revoluções científicas incluíram, sem excepção, o destronar da arrogância humana de pedestal após pedestal de convicções prévias acerca da nossa centralidade no cosmos.

Stephen Jay Gould (1941–2002)

Nunca uma posição partindo de outros pressupostos enriqueceu o nosso conhecimento efectivo do cosmos, incluindo conhecimento sobre o ser humano (que é uma parte desse cosmos!).

“Evolução” e ideias erradas

- teoria da “evolução” \nrightarrow evolução de animais “inferiores” para animais “superiores” (*teoria da descendência modificada pela variação e selecção natural*)
- acaso das mutações \nrightarrow “evolução” caótica.
- mais “apto” \nrightarrow mais forte.
- teoria da evolução \nrightarrow comportamentos avarentos, “imorais” ou “animalescos”; não justifica “lei do mais forte”.

Estas e outras razões, que se prendem com a remoção do ser humano de um lugar central entre os seres vivos, levam a certas recusas emocionais, conscientes ou inconscientes, das consequências profundas, “*transcendentalmente democráticas*”, da teoria da evolução.

[Carl Sagan, Ann Druyan, *Shadows of Forgotten Ancestors*, Ballantine Books (1993) p. 67]

“Evolução” e ideias erradas

Roger Penrose escreve em *“The Road to Reality”* (2005):

Como me sinto, realmente, acerca da possibilidade de todas as minhas acções, e as de todos os meus amigos, serem em última análise governadas por princípios matemáticos deste tipo? Eu preferiria ter estas acções controladas por algo que habita algum aspecto do fabuloso mundo matemático de Platão do que tê-las sujeitas ao tipo de razões básicas e simplistas, tais como procura de prazer, avareza individual ou violência agressiva que muitos argumentam ser as implicações de um ponto de vista estritamente científico.

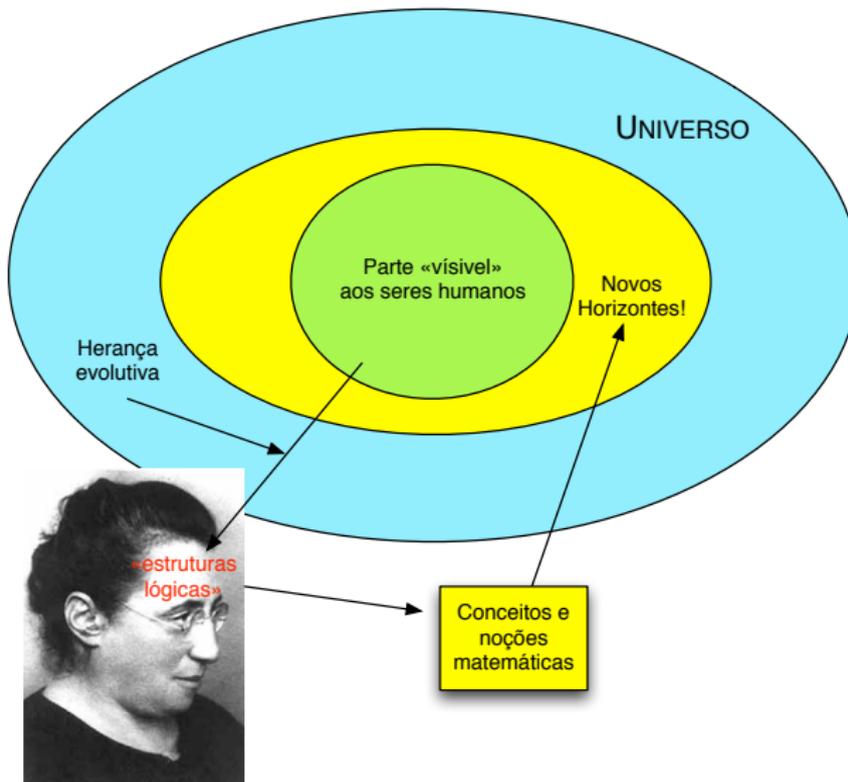
[...] continua a ser um profundo quebra-cabeças perceber porque razão as leis matemáticas se aplicam ao mundo com uma precisão tão fenomenal.

Uma perspectiva Darwiniana

Carl Sagan, *The Dragons of Eden*, 1977:

Podemos imaginar um universo no qual as leis da natureza são imensamente mais complexas. Mas nós não vivemos num tal universo. Porque não? Penso que talvez tal se deva ao facto de todos os organismos que apreendiam o seu universo como muito complexo estarem mortos. [...] A selecção natural serviu como uma espécie de crivo intelectual, produzindo cérebros e inteligências cada vez mais competentes para lidar com as leis da natureza. Esta ressonância, extraída por selecção natural, entre os nossos cérebros e o universo pode ajudar a explicar o enigma descrito por Einstein: a propriedade mais incompreensível do universo, disse, é que seja tão compreensível.

O Universo, a Matemática e Nós



A condição humana

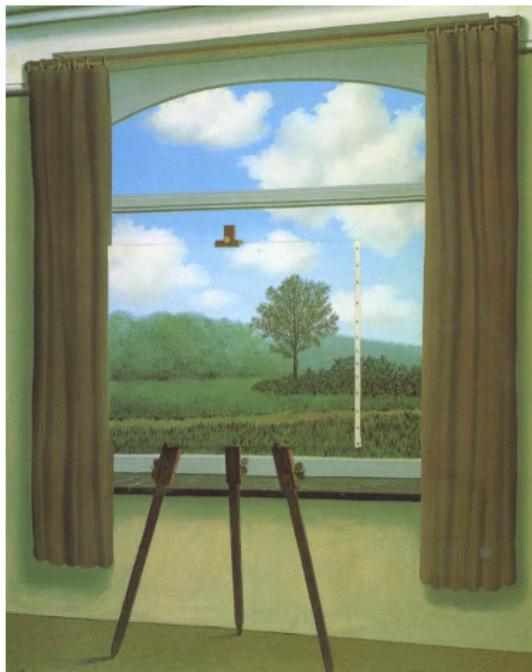


Figura: A condição humana (René Magritte, 1933).

A minha posição

A matemática corresponde, em última análise, a algo de **Real**, a que acedemos através da nossa **Intuição**, que beneficia das adaptações evolutivas da nossa espécie e que ajuda a **Construir** instrumentos e desenvolver noções, usando simbioticamente a **Experiência** e a **Razão**, que são destiladas em **Conceitos** que permitem **Avançar** na exploração da **Realidade**.

E esse “algo de real” é a própria textura do cosmos que corresponde a leis profundas que regem as mais diversas inter-relações entre “objectos”.

A minha posição

Realismo

Intuitivo –

Construtivista

Empírico –

Racionalista

Conceptualista

Anti –

Radical

Alguma Bibliografia

- Jacques Monod, **O Acaso e a Necessidade**, Europa-América, 1977.
- Carl Sagan, **The Dragons of Eden: speculations on the evolution of human intelligence**, Hodder & Stoughton, 1977.
(Tradução publicada em 2002 na colecção *Ciência Aberta* da editora Gradiva)
- Douglas Hofstadter, **Gödel, Escher and Bach: an eternal golden braid**, Basic Books, 1978.
- François Guénard, Gilbert Lelièvre (eds.), **Penser les Mathématiques**, Éditions du Seuil, 1982.
- **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**, Edward N. Zalta (ed.),
<http://plato.stanford.edu>